



Conceptos previos

Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas (MCMA)

De dos o más expresiones algebraicas es la expresión algebraica de menor coeficiente y de menor grado que es divisible exactamente por cada una de las expresiones dadas.

I) MCMA de monomios:

1º) determinar el MCM entre los coeficientes

2º) agregar como producto todos los factores literales distintos y comunes considerados con el mayor exponente.

Ej: el MCMA de:

$$6m^2n^2; 18m^3n; 15a^3m^3n$$

$$\text{Es } 180a^3m^3n^2$$

$$\text{Ej: MCMA de } 24a^2x^3; 36a^2y^4; 40a^2y^5; 60a^3y^6$$

$$\text{Es } 360a^3x^3y^6$$

II) MCMA de monomios y polinomios

Regla:

1º) descomponer las expresiones en sus factores primos por factorización

2º) el MCMA es el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente

$$\text{Ej: el MCMA de } x^2, x^3 + x^2 - 2x; x^2 + 4x + 4$$

factorizando

$$x^2; x(x^2 + x - 2); (x + 2)^2$$

$$x^2; x(x + 2)(x - 1); (x + 2)^2$$

$$\text{MCMA} = x^2(x + 2)^2(x - 1)$$

2: MCMA:

$$8x^2; x^3 + x^2 - 6x; 2x^3 - 8x^2 + 8x; 4x^3 + 24x^2 + 36x$$

$$8x^2; x(x^2 + x - 6); 2x(x^2 - 4x + 4); 4x(x^2 + 6x + 9)$$

$$8x^2; x(x + 3)(x - 2); 2x(x - 2)^2; 4x(x + 3)^2$$

$$\text{MCMA} = 8x^2(x - 2)^2(x + 3)^2$$

3:

$$m^2 - mn; mn + n^2; m^2 - n^2$$

$$m(m - n); n(m + n); (m + n)(m - n)$$

$$\text{RP: } mn(m + n)(m - n)$$

4: Hallar el MCMA entre:

$$(x + 1)^3; x^3 + 1; x^2 - 2x - 3$$

$$(x + 1)^3; (x + 1)(x^2 - x + 1); (x - 3)(x + 1)$$

$$\text{RP: } (x + 1)^3(x^2 - x + 1)(x - 3)$$

APLICACIÓN A LA SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Procedimientos: Factorizar numerador y denominador y simplificar

$$\text{Ej: } \frac{3ab}{2a^2x + 2a}$$

$$\text{Factorizando: } \frac{3ab}{2a^2(x + 2a)} = \frac{3b}{2a(x + 2a)}$$

$$\text{Ej 2: } \frac{x^3 + 4x^2 - 21x}{x^3 - 9x}$$

$$\frac{x(x^2 + 5x - 21)}{x(x^2 - 9)}$$

$$\frac{(x + 7)(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{x + 7}{x + 3}$$

$$\text{Ej 3: } \frac{a^2 - a - 20}{a^2 - 7a + 10} = \frac{(a-5)(a+4)}{(a-5)(a-2)} = \frac{a+4}{a-2}$$

$$\text{Ej 4: } \frac{a^3 + 1}{a^4 - a^3 + a - 1} = \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a^3(a-1) + (a-1)}$$

$$\frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{(a-1)(a^3 + 1)} = \frac{1}{a-1}$$

$$\text{Ej 5: } \frac{x^2 + x - 12}{16 - x^2} = \frac{(x-4)(x+3)}{-(x^2 - 16)} = \frac{-(x-4)(x+3)}{(x+4)(x-4)}$$

$$\frac{-(x+3)}{(x+4)}$$

$$\text{Ej 6: } \frac{2x^2 - 9x - 5}{10 + 3x - x^2} = \frac{-(x-5)(2x+1)}{(x^2 - 3x - 10)}$$

$$\frac{2x^2 - 9x - 5}{(2x)^2 - 9(2x) - 10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-(x-5)(2x+1)}{(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{(2x-10)(2x+1)}{2} = \frac{-(2x+1)}{(x+2)}$$

$$\frac{2(x-5)(2x+1)}{2}$$

APLICACIÓN A LA REDUCCION DE SUMAS DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Regla: Simplificar cada fracción según MCDA entre los denominadores.

$$\text{Ej 1: } \frac{a+3b}{3ab} + \frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}$$

$$\text{MCMA } (3ab ; 5a^2b^2) = 15a^2b^2$$

$$\text{Luego: } \frac{5ab(a+3b) + 3(a^2b-4ab^2)}{15a^2b^2}$$

$$\frac{5a^2b + 15ab^2 + 3a^2b - 12ab^2}{15a^2b^2}$$

$$\frac{8a^2b + 3ab^2}{15a^2b^2} = \frac{ab(8a + 3b)}{15a^2b^2}$$

$$\frac{8a + b}{15ab}$$

$$\text{Ej 2: } \frac{1}{ab} + \frac{b^2 - a^2}{ab^3} + \frac{ab + b^2}{a^2b^2}$$

$$\text{Ej 3: } \frac{3}{1-x} + \frac{6}{2x+5} = \frac{3(2x+5) + 6(1-x)}{(1-x)(2x+5)}$$

$$\frac{6x + 15 + 6 - 6x}{(1-x)(2x+5)} = \frac{21}{(1-x)(2x+5)}$$

$$\text{Ej 4: } \frac{1}{a-5} + \frac{a}{a^2 - 4a - 5} + \frac{a+5}{a^2 + 2a + 1}$$

$$\frac{1}{a-5} + \frac{a}{(a-5)(a-1)} + \frac{a+5}{(a+1)^2}$$

$$\frac{1 \cdot (a+1)^2 + a \cdot (a+1) + (a+5) \cdot (a-5)}{(a-5)(a+1)^2}$$

$$\frac{a^2 + 2a + 1 + a^2 + a + a^2 - 25}{(a-5)(a+1)^2} = \frac{3a^2 + 3a - 24}{(a-5)(a+1)^2}$$

$$= \frac{3(a^2 + a - 8)}{(a-5)(a+1)}$$

$$\text{Ej 5: } \frac{1}{x^2 - xy} - \frac{1}{x^2 - xy} - \frac{2y}{x^3 - xy^2}$$

$$\frac{1}{x(x-y)} - \frac{1}{x(x+y)} - \frac{2y}{x(x^2 - y^2)}$$

$$\frac{1}{x(x-y)} - \frac{1}{x(x+y)} - \frac{2y}{x(x+y)(x-y)}$$

$$\frac{1 \cdot (x+y) - 1(x-y) - 2y}{x(x-y)(x+y)}$$

$$\frac{x+y-x+y-2y}{x(x-y)(x+y)} = \frac{0}{x(x-y)(x+y)} = 0$$

Ej 6: $\frac{a+3}{a^2-1} + \frac{a-1}{2a+2} + \frac{a-4}{4a-4}$

$$\frac{a+3}{(a+1)(a-1)} + \frac{a-1}{2(a+1)} + \frac{a-4}{4(a-1)}$$

$$\frac{4(a+3) + 2(a-1)(a-1) + (a-4)(a+1)}{4(a+1)(a-1)}$$

$$\frac{4a+12+2(a^2-2a+1)+a^2-3a-4}{4(a+1)(a-1)}$$

$$\frac{4a+12+2a^2-4a+2+a^2-3a-4}{4(a+1)(a-1)}$$

$$\frac{3a^2-3a+10}{4(a+1)(a-1)}$$

Ej 7: $\frac{1-x^2}{9-x^2} - \frac{x^2}{9+6x+x^2} - \frac{6x}{9-6x+x^2}$

$$\frac{-(1-x^2)}{x^2-9} - \frac{x^2}{x^2+6x+9} - \frac{6x}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x^2-1}{(x+3)(x-3)} - \frac{x^2}{(x+3)^2} - \frac{6x}{(x-3)^2}$$

$$\frac{(x^2-1)(x+3)(x-3) - x^2(x-3)^2 - 6x(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)^2}$$

$$\frac{(x^2-1)(x^2-9) - x^2(x^2-6x+9) - 6x(x^2+6x+9)}{(x+3)^2(x-3)^2}$$

$$\frac{-55x^2 - 54x + 9}{(x+3)^2(x-3)^2}$$

$$\frac{9 - 54x - 55x^2}{(x+3)^2(x-3)^2}$$

$$\text{Ej 8: } \frac{a-3}{20a+10} + \frac{2a+5}{40a+20} - \frac{4a-1}{60a+30}$$

$$\frac{a-3}{10(2a+1)} + \frac{2a+5}{20(2a+1)} - \frac{4a-1}{30(2a+1)}$$

$$\frac{6(a-3) + 3(2a+5) - 2(4a-1)}{60(2a+1)}$$

$$\frac{6a - 18 + 6a + 15 - 8a + 2}{60(2a+1)}$$

$$\frac{4a-1}{60(2a+1)}$$

Ej 9: ¡Ponga atención en los cambios de signos!

$$\frac{a+b}{a^2-ab} + \frac{a}{b^2-a^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-ab} - \frac{a}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a+b}{a(a-b)} - \frac{a}{(a+b)(a-b)}$$

$$\frac{(a+b)(a+b) - a \cdot a}{a(a-b)(a+b)}$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b - a^2}{a(a-b)(a+b)}$$

$$\frac{2ab + b^2}{a(a-b)(a+b)}$$

Ej 10 :

$$\frac{1}{a-3} + \frac{a+1}{(3-a)(a-2)} + \frac{2}{(2-a)(a-1)}$$

$$\frac{1}{(a-3)} - \frac{a+1}{(a-3)(a-2)} + \frac{2}{(2-a)(a-1)}$$

APLICACIONES AL PRODUCTO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Regla:

Factorizar las sumas y/o restas y luego simplificar aplicando el criterio de las fracciones aritméticas

Ej: 1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c}{b}$ 2) $\frac{2m}{7n} \cdot \frac{14an}{m} = 4a$

3) $\frac{2x^2+x}{6} \cdot \frac{8}{4x+2}$ 4) $\frac{x^2+2x}{x^2-16} \cdot \frac{x^2-2x-8}{x^3+x^2} \cdot \frac{x^2+4x}{x^2+4x+4}$

5) $\frac{a^2+7a+10}{a^2-6a-7} \cdot \frac{a^2-3a-4}{a^2+2a-15} \cdot \frac{a^3-2a^2-3a}{a^2-2a-8}$

$$\frac{(a+5)(a+2)}{(a-7)(a+1)} \cdot \frac{(a-4)(a+1)}{(a+5)(a-3)} \cdot \frac{a(a^2-2a-3)}{(a-4)(a+2)}$$

$$\frac{a(a-3)(a+1)}{(a-7)(a-3)} = \frac{a(a+1)}{a-7}$$

ejemplo 3.-

$$\frac{x+1-\frac{6x+12}{x+2}}{x-4+\frac{11x-22}{x-2}} = \left[\left(x+1-\frac{6x+12}{x-2} \right) \div x-5 \right] \div \left[\left(x-4+\frac{11x-22}{x-2} \right) \div x+7 \right]$$

$$\left[\left(\frac{(x+1)(x+2)-(6x+12)}{x-2} \right) \div x-5 \right] \div \left[\left(\frac{(x-4)(x-2)+11x-22}{x-2} \right) \div x+7 \right]$$

$$\left[\left(\frac{x^2+3x+2-6x-12}{x-2} \right) \times \frac{1}{x-5} \right] \div \left[\left(\frac{x^2-6x+8+11x-22}{x-2} \right) \times \frac{1}{x+7} \right]$$

$$\left[\left(\frac{x^2-3x-10}{x-2} \right) \times \frac{1}{x-5} \right] \div \left[\left(\frac{x^2+5x-14}{x-2} \right) \times \frac{1}{x+7} \right]$$

$$\left[\frac{(x-5)(x+2)}{(x+2)} \times \frac{1}{(x-5)} \right] \div \left[\frac{(x+7)(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{(x+7)} \right]$$

Ejercicios.

1.- $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2} - \frac{4x-7}{x^2-x-6}$

2.- $\frac{a}{3a+6} - \frac{1}{6a+12} + \frac{a+12}{12a+24}$

3.- $\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{3x} - \frac{1}{x^2}$

4.- $\frac{a+3}{a^2+1} + \frac{a-1}{2a+2} + \frac{a-4}{4a-4}$

5.- $\frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{ab} - \frac{a}{ab+b^2}$

6.- $\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y} + \frac{4x^2}{x^2-y^2}$

7.- $\frac{x}{a^2-ax} + \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$

8.- $\frac{x+1}{x^2-x-20} - \frac{x+4}{x^2-4x-5} + \frac{x+5}{x^2+5x+4}$

9.- $\frac{2x+1}{12x+8} - \frac{x^2}{6x^2+x-2} + \frac{2x}{16x-8}$

10.- $\frac{1}{ax} - \frac{1}{a^2+ax} + \frac{1}{a+x}$

11.- $\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} + \frac{2y}{x^2+y^2}$

12.- $\frac{a-1}{3a+3} - \frac{a-2}{6a-6} + \frac{a^2+2a-6}{9a^2-9}$

13.- $\frac{1}{a^2+2a-24} + \frac{2}{a^2-2a-8} - \frac{3}{a^2+8a+12}$

14.- $\frac{x+y}{xy} - \frac{x+2y}{xy+y^2} - \frac{y}{x^2+xy}$

15.- $\frac{a^3}{a^3+1} + \frac{a+3}{a^2-a+1} - \frac{a-1}{a+1}$

16.- $\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} - \frac{3x^2}{x^3-1}$

17.- $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} - \frac{1}{a+b} + \frac{3a^2}{a^3+b^3}$

18.- $\frac{2}{x-2} + \frac{2x+3}{x^2+2x+4} - \frac{6x+12}{x^3-8}$

19.- $\frac{3x+2}{x^2+3x-10} - \frac{5x+1}{x^2+4x-5} + \frac{4x-1}{x^2-3x+2}$

20.- $\frac{1-x^2}{9-x^2} - \frac{x^2}{9+6x+x^2} - \frac{6x}{9-6x+x^2}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN:

1.-Dos resistencias en serie se conectan a una f.e.m. Los valores de las resistencias son $R = \frac{2}{x-5} \Omega$ y $R' = \frac{3x}{x^2-25}$. Calcular la resistencia equivalente del circuito.

2.-Los lados de un triángulo son $a = \frac{x+5}{x^2+x-12}$; $b = \frac{x+4}{x^2+2x-15}$; $c = \frac{x-3}{x^2+9x+20}$. Calcular el perímetro y el semiperímetro del triángulo ABC.

3.-El semiperímetro de un rectángulo está dado por la expresión: $\frac{3a^2}{9a^2-b^2}$, si uno de los lados corresponde a $\frac{ab}{9a^2-b^2}$. Determine la expresión algebraica del otro lado.

4.-Tenía $\$ \frac{x}{2x+2}$, gaste $\$ \frac{x+1}{3x-3}$, después de esto me dieron $\$ \frac{x-1}{6x+6}$ y en seguida pagué $\$ \frac{5}{18x-18}$. ¿Cuanto es lo que tengo finalmente?

5.-Se conectan dos resistencias en paralelo a una f.e.m. Calcular la resistencia equivalente del circuito si $R = m-n$ y $R' = \frac{n^2-m^2}{m}$

6.-El área de un cuadrado está dada por la expresión: $\frac{x-4}{x^2-2x-3}$, y el área de círculo inscrito en este cuadrado está dada por la expresión: $\frac{x}{6-2x}$. Determine una expresión para el área de la región comprendida entre el círculo y el cuadrado.

7.-Un número A está dado por la expresión $A = \frac{x^2+2x-3}{x}$, otro número B está dado por la expresión: $B = \frac{(1-x)(x+2)}{x-3}$ y un tercer número C está dado por la expresión $C = x+2$. Determine una expresión para la suma de los valores recíprocos de estos tres números.

APLICACIONES A LA SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES COMPLEJAS.-

Es una expresión en la cual el numerador o el denominador, o ambos, son fracciones algebraicas o expresiones mixtas.

1º) vaya de lo mas simple a lo mas complejo, operando tanto en el denominador como en el denominador.

EJERCICIOS.

$$1.- \frac{a - \frac{a}{b}}{b - \frac{1}{b}}$$

$$2.- \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$3.- \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}$$

$$4.- \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}$$

$$5.- \frac{x - \frac{x}{2}}{x - \frac{x}{4}}$$

$$6.- \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$$

$$7.- \frac{x + 4 + \frac{3}{x}}{x - 4 - \frac{5}{x}}$$

$$8.- \frac{a - 4 + \frac{4}{a}}{1 - \frac{2}{a}}$$

$$9.- \frac{\frac{2a^2 - b^2}{a} - b}{\frac{4a^2 + b^2}{4ab} + 1}$$

$$10.- \frac{2 + \frac{3a}{5b}}{a + \frac{10b}{3}}$$

$$11.- \frac{a - x + \frac{x^2}{a+x}}{a^2 - \frac{a^2}{a+x}}$$

$$12.- \frac{a + 5 - \frac{14}{a}}{1 + \frac{8}{a} + \frac{7}{a^2}}$$

$$13.- \frac{\frac{1}{a} - \frac{9}{a^2} + \frac{20}{a^3}}{\frac{16}{a} - a}$$

$$14.- \frac{a - x + \frac{x^2}{a+x}}{a^2 - \frac{a^2}{a+x}}$$

$$15.- \frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 + \frac{1}{x^2-1}}$$

$$16.- \frac{a - \frac{ab}{a+b}}{a + \frac{ab}{a-b}}$$

$$17.- \frac{x - 1 - \frac{5}{x+3}}{x + 5 - \frac{35}{x+3}}$$

$$18.- \frac{a + 2 - \frac{7a+9}{a+3}}{a - 4 + \frac{5a-11}{a+1}}$$

$$19.- \frac{\left(1 + \frac{1-b^2}{4ab}\right)}{\left(1 + \frac{a}{b}\right)}$$

$$20.- \frac{x + 1 - \frac{6x+12}{x+2}}{x - 4 + \frac{11x-22}{x-2}}$$